A • Guimier
(*mars 2023*)

Démonstrations relatives à l'explicitation d'une matrice de Lorentz symétrique sous la forme :

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^{\,2} & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^{\,2} & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^{\,2} \end{bmatrix}$$

Résumé : On rapelle 2 démonstrations et on en donne une nouvelle .

Nous avons déjà donné 2 démonstrations dans :
https ://hal − amu • archives − ouvertes • fr / hal - 03576259
et
https ://hal - amu • archives - ouvertes • fr / hal - 03640170
(compléments • pdf). On donne ici une troisième :
On part de : Special relativity de Schröder Ulrich E p.92
On peut consulter le livre à :
https ://archive • org / details / specialrelativit0000schr / page / 92 / mode / 2 up?view=theater .

*En suivant Schröder considérons une matrice de Lorentz **M** symétrique de la forme :*

$$M = A. \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^{T}A \quad \text{avec } \beta = \left\| \vec{\beta} \right\|,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix},\ \Omega \text{ une matrice orthogonale } 3\,x3\ .$$

*Comme **Ω** est une matrice de rotation **3 x3** on peut la décomposer en un produit de **3** rotations élémentaires (angles d'Euler) :*
(voir par exemple : https ://en • wikipedia • org / wiki / Rotation_formalisms_in_three_dimensions) .
On peut donc écrire $A = Rz \cdot Ry \cdot Rx$ *avec :*

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},\ Ry = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix},\ Rz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ d'où :}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi)\cos(\varphi) & -\sin(\psi)\cos(\theta) + \cos(\psi)\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta) + \cos(\psi)\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\psi)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\cos(\theta) + \sin(\psi)\sin(\varphi)\sin(\theta) & -\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\psi)\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

et donc : (on peut utiliser Maple)

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \cos(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & \sin(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & -\sin(\varphi)\,\gamma\beta \\ \cos(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & 1 + \cos(\psi)^2\,(-1+\gamma)\cos(\varphi)^2 & \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2\,(-1+\gamma) & -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)\,(-1+\gamma) \\ \sin(\psi)\cos(\varphi)\,\gamma\beta & \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2\,(-1+\gamma) & 1 + \left((1-\gamma)\cos(\psi)^2 - 1 + \gamma\right)\cos(\varphi)^2 & -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)\,(-1+\gamma) \\ -\sin(\varphi)\,\gamma\beta & -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)\,(-1+\gamma) & -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)\,(-1+\gamma) & (1-\gamma)\cos(\varphi)^2 + \gamma \end{bmatrix}.$$

On peut toujours évaluer directement la première colonne d'une matrice de Lorentz générale en fonction de $\vec{\beta}$ *en considérant les coordonnées de l'observateur **O'** dans les*

2 bases associées à $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *:*

$$\text{Si on pose } M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \text{ alors } M \cdot \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{o'} = \begin{bmatrix} ct \\ c\cdot\beta_1\cdot t \\ c\cdot\beta_2\cdot t \\ c\cdot\beta_2\cdot t \end{bmatrix}_{o} \text{ d'où :}$$

Si on pose $\gamma = m_{1,1}$ *alors* $\gamma\cdot t' = t$ *de plus* $\gamma > 0\cdot$ *(principe de causalité) .*

$$\text{On en déduit que la première colonne s'écrit } \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma\cdot\beta_1 \\ \gamma\cdot\beta_2 \\ \gamma\cdot\beta_3 \end{bmatrix}.$$

Par identification : $\cos(\psi)\cos(\varphi) = \dfrac{\beta_1}{\beta}$, $\sin(\psi)\cos(\varphi) = \dfrac{\beta_2}{\beta}$, $\sin(\varphi) = -\dfrac{\beta_3}{\beta}$.

On rapelle que $\gamma^2\cdot\beta^2 = \gamma^2 - 1$ *puisque* $1 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right)$.

Calcul des $m_{i,j}$ *:*

$$m_{2,2} = 1 + \cos(\psi)^2(-1+\gamma)\cos(\varphi)^2 = 1 + \cos(\psi)^2\cos(\varphi)^2\frac{\gamma^2\cdot\beta^2}{1+\gamma}$$

$$= 1 + \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^2\frac{\gamma^2\cdot\beta^2}{1+\gamma} \qquad = 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1^2 .$$

$$m_{3,3} = 1 + \left((1-\gamma)\cos(\psi)^2 - 1 + \gamma\right)\cos(\varphi)^2 = 1 + (1-\gamma)\left(\cos(\psi)^2\cos(\varphi)^2 - \cos(\varphi)^2\right)$$

$$= 1 + (1-\gamma)\left(\cos(\psi)^2\cos(\varphi)^2 - 1 + \sin(\varphi)^2\right) = 1 + (1-\gamma)\left(\frac{\beta_1^2 - \beta^2 + \beta_3^2}{\beta^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\cdot\beta_2^2 .$$

$$m_{4,4} = (1-\gamma)\cos(\varphi)^2 + \gamma = 1 + (\gamma-1)\left(1-\cos(\varphi)^2\right) = 1 + \frac{\gamma^2\cdot\beta^2}{1+\gamma}\sin(\varphi)^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_3^2 .$$

$$m_{3,2} = \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\varphi)^2(-1+\gamma) = \sin(\psi)\cos(\varphi)\cos(\psi)\cos(\varphi)(-1+\gamma) = \frac{\gamma^2\cdot\beta^2}{1+\gamma}\frac{\beta_2}{\beta}\frac{\beta_1}{\beta}$$

$$= \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_2 .$$

$$m_{4,3} = -\cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_3 \ .$$

$$m_{4,2} = -\cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\varphi)(-1+\gamma) = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_3 \ .$$

On complète par symétrie .

Application :

*Considérons 2 observateurs **O** et **O'** en translation uniforme l'un par rapport à l'autre munis des bases spatio − temporelles $\mathcal{B}o$ et $\mathcal{B}o'$ telle que la matrice Λ_0 de passage de $\mathcal{B}o$ à $\mathcal{B}o'$ vérifie :*

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Considérons pour **O** et **O'** 2 bases quelconques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et **M** la matrice de passage de **O** à **O'**.*

*Les matrices **A** et **B** de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}o$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}o'$ sont des matrices orthogonales de la forme :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}, \ \Omega \text{ une matrice orthogonale } 3\,x3 \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega' \end{bmatrix}, \ \Omega' \text{ une matrice orthogonale } 3\,x3 \ .$$

Par composition des matrices de passage :

$M = A\Lambda_0{}^tB$ *donc et* $M = A\,\Lambda_0{}^tA \bullet A \bullet {}^tB$ *: on a la décomposition polaire de **M** ,*

qu'on peut encore écriresous la forme :
puisque d'aprés ce qui précéde :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x\cdot\gamma & \beta_y\cdot\gamma & \beta_z\cdot\gamma \\ \beta_x\cdot\gamma & 1+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_x\cdot\beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_x\cdot\beta_z \\ \beta_y\cdot\gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_y\cdot\beta_x & 1+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_y\cdot\beta_z \\ \beta_z\cdot\gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_z\cdot\beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_z\cdot\beta_y & 1+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\cdot\beta_z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ *est une matrice orthogonale* ***3 x3 avec*** $A \bullet {}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}.$

Bibliographie :

Ulrich E Schröder , Special relativity p.92 World Scientific 1990 .